

CONCOURS D'ENTRÉE EN 1ÈRE ANNÉE DU CYCLE INGÉNIEUR (SESSION
 DU 10/09/2012)

L L

Epreuve de Mathématiques (Durée 1h 30 min)
 QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES

Lisez soigneusement les consignes ci-dessous :

- Les formulaires, les calculatrices, les téléphones portables ainsi que tous les appareils électroniques ne sont pas autorisés.
- Ce QCM comporte 20 exercices. Pour chaque exercice, une seule des quatre propositions (a), (b), (c), (d) est exacte. Le candidat doit mettre une croix correspondante à la réponse choisie sur la fiche des réponses.

- Barème : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Réponse juste} = 1 \text{ point,;} \\ \text{Réponse fausse} = -\frac{1}{2} \text{ point;} \\ \text{Absence de réponse} = 0 \text{ point.} \end{array} \right.$

Exercice 1. Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F , f est injective si et seulement si :

- $f^{-1}(f(A)) = A$, pour tout $A \subset E$.
- $f(f^{-1}(B)) = B$, pour tout $B \subset F$.
- $f(E) = F$.
- $A \subset f^{-1}(f(A))$ pour tout $A \subset E$.

Exercice 2. Lequel des espace suivant est un sous-espace vectoriel :

- $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X)P(-X) = P(X^2)\}$.
- $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 2\}$.
- $E = \{Q \in \mathbb{R}[X] \mid P \text{ divise } Q\}$, Pour un polynôme P non nul fixé.
- E est l'ensemble de solutions de l'équation différentielle $y' + x^2y = e^x$.

Exercice 3. On considère la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est diagonalisable.
- La matrice A est de rang 1.
- La matrice A est de rang 2.
- La matrice A n'est pas diagonalisable.

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur un voisinage de 0 , on note par DL le développement limité, alors :

- (a) La fonction $\frac{f}{g}$ admet un DL d'ordre 2 en 0 .
 (b) La fonction $x \mapsto x^2 f(x) g(x)$ admet un DL d'ordre 4 en 0 .
 (c) La fonction $x \mapsto x^2 f(x) + g(x)$ admet un DL d'ordre 4 en 0 .
 (d) La fonction $x \mapsto f(x) + g^2(x)$ admet un DL d'ordre 4 en 0 .

Exercice 5. Pour quelles valeurs de α , l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(1 + \frac{\tan^2(x)}{x^\alpha}) dx$ est convergente.

- (a) $0 < \alpha < 1$ (b) $\alpha > 3$ (c) $0 < \alpha < 2$ (d) $1 < \alpha < 3$.

Exercice 6. La limite de $\int_1^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} dx$ quand n tend vers $+\infty$ vaut

- (a) n'existe pas (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 7. L'air du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq 4 - x^3\}$ est égal à

- (a) $\frac{10}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{20}{3}$ (d) $\frac{22}{3}$.

Exercice 8. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on note J son intégrale sur $[0, +\infty[$.

- (a) Si pour tout $x \geq 1$ on $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, alors J converge.
 (b) Si pour tout $x \geq 1$ on $f(x) \leq \frac{1}{x}$, alors J converge.
 (c) Si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, alors J converge.
 (d) Si pour tout $x \geq 1$ on $0 \leq f(x) \leq x^2$, alors l'intégrale de $e^{-x} f(x)$ converge sur $[0, +\infty[$.

Exercice 9. Soit (S) un système de 4 équations à 3 inconnues.

- (a) Le rang de (S) est au moins égale à 3.
 (b) Si (S) est de rang égal à 3, alors (S) a une solution unique.
 (c) Si (S) est de rang égal à 2, alors (S) soit impossible, soit l'ensemble de solutions est une droite affine.
 (d) Si (S) est de rang égal à 1, alors l'ensemble de solutions de (S) est un plan affine.

Exercice 10. On considère la forme quadratique suivante dépendant d'un paramètre a dans $\mathbb{R}$. $q_a(x) = x_1^2 + (1+a)x_2^2 + (1+a+a^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3$.

- (a) Si $a < 0$, alors le rang est égal à 2 et la signature est $(2, 0)$.

- (b) Si $a > 0$, alors le rang est égal à 3 et la signature est $(2, 1)$.
 (c) Si $a = 0$, alors le rang est égal à 2 et la signature est $(1, 1)$.
 (d) Si $a < 0$, alors le rang est égal à 3 et la signature est $(2, 1)$.

Exercice 11. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), P_f son polynôme caractéristique et π_f son polynôme minimal.

- (a) Si $\pi_f(X) = X^2 - X$, alors f n'est pas diagonalisable.
 (b) Si $\pi_f(X) = X^2 - X$, alors f est nilpotent.
 (c) Si $P_f = (-1)^n \pi_f$, alors f n'est pas diagonalisable.
 (d) Si $\pi_f(X) = X^2 - 1$, alors f est une symétrie.

Exercice 12. (a) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions qui converge uniformément sur I vers une fonction f bornée, alors pour chaque n , la fonction f_n est bornée sur I .

- (b) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur I qui converge uniformément vers f sur I , alors la fonction f est continue sur I .
 (c) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions qui converge uniformément sur $[a, b[$ et si la suite numérique $(f_n(b))_n$ est convergente, alors la suite de fonction $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.
 (d) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions bornées qui converge uniformément sur I vers une fonction f , alors f est bornée sur I .

Exercice 13. (a) Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum \cos(n)u_n$ converge absolument.

- (b) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
 (c) Si la série $\sum u_n^2$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
 (d) Si la suite $(u_n)_n$ décroissante tend vers 0, alors la série $\sum \cos(n)u_n$ converge.

Exercice 14. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, par

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \text{ et } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ la fonction somme de la série } \sum f_n(x).$$

- (a) f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
 (b) f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
 (c) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
 (d) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 15. Le résidu de la fonction complexe définie par $g(z) = \frac{z^a}{1-z}$ au singularité isolée vaut :

- (a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

Exercice 16. Soient f et g deux fonctions continûment différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on pose $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ et (a, b) un point de A , on note ∇_f et ∇_g le gradient de f et g au point (a, b) avec $\nabla_g \neq 0$.

- (a) Si $\nabla_f = 0$, alors f atteint son maximum en (a, b) .
- (b) Si la matrice hessienne de f au point (a, b) a deux valeurs propres strictement positives, alors (a, b) est un minimum local pour f .
- (c) Si f atteint son maximum au point (a, b) , alors ∇_f et ∇_g sont proportionnels.
- (d) Si $\nabla_f = 2\nabla_g$ alors f atteint au point (a, b) soit son maximum, soit son minimum.

Exercice 17. Soit f une fonction 2π -périodique, de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$, on désigne par a_n, b_n les coefficients réels de Fourier et c_n les coefficients complexe de Fourier.

- (a) Si f est une fonction paire, alors les coefficients a_n sont tous nuls.
- (b) $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2n\pi x) + b_n \sin(2n\pi x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.
- (c) La suite $(c_n)_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
- (d) Si f est une fonction impaire, alors les coefficients b_n sont tous nuls.

Exercice 18. Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$, par $f(x) = x$, alors les coefficients réels de Fourier sont donnés par :

- (a) $a_n \neq 0$ et $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.
- (b) $a_n = 0$ et $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
- (c) $a_n = 0$ et $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
- (d) Autre réponse.

Exercice 19. Soit A une matrice carrée antisymétrique réelle d'ordre n . Le polynôme caractéristique de A :

- a) est pair, c) a la même parité que n
- b) est impair d) a une parité opposé à celle de n

Exercice 20. Considérons un endomorphisme f sur un espace vectoriel de dimension fini E tel que $f^3 = 16f$, alors :

- (a) La trace de f est un entier impair.
- (b) La trace de f est un entier pair.
- (c) f n'est pas diagonalisable.
- (d) f n'est pas trigonalisable.